

1. (a) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

2

(i) সমস্ত পূর্ণ সংখ্যার সেট $\mathbb{Z}$ -এর ওপর একটি দ্বিনিধানী প্রক্রিয়া $*$ নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত $a * b = a + b + 5$; $a, b \in \mathbb{Z}$
 $*$ প্রক্রিয়াটি $\mathbb{Z}$ -এ সংযোজ্য কিনা যাচাই করো।

(ii) মান নির্ণয় করো : $\tan^{-1}\left\{2 \cos\left(2 \sin^{-1} \frac{1}{2}\right)\right\}$ ।

(b) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

2

(i) যদি $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ এবং $A^2 = -xI + yA$ হয়, যেখানে I হল 2 মাত্রার একক ম্যাট্রিক্স; তাহলে x ও y নির্ণয় করো।

(ii) বিস্তার না করে দেখাও যে, $\begin{vmatrix} 9 & 9 & 12 \\ 1 & -3 & -4 \\ 1 & 9 & 12 \end{vmatrix} = 0$

(c) যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

2×3=6

(i) $f(x) = 4^{\sin x}$ অপেক্ষকের জন্য $[0, \pi]$ বিস্তারে, Rolle-এর উপপাদ্যটি যাচাই করো।

(ii) সীমাটির মান নির্ণয় করো : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + e^{-x} - 2}{x}$ ।

(iii) প্রদত্ত অপেক্ষকটি $f(x) = \frac{\sin x}{kx} + k$, যখন $x \neq 0$
 $= 2$, যখন $x = 0$
 $x = 0$ বিন্দুতে সন্তুষ্ট হলে, k -এর মান নির্ণয় করো।

(iv) যদি $\sin^{-1}\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) = k$ হয়, (k একটি ধ্রুবক) তাহলে প্রমাণ করো, $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ ।

(v) মান নির্ণয় করো : $\int \sin \sqrt{x} \, dx$ ।

(vi) $y = Ae^{2x} + Be^{-2x}$, বক্ররেখাসমূহের অবকল সমীকরণ নির্ণয় করো, যেখানে A এবং B প্যারামিটার।

(d) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

2

(i) যে সরলরেখার কার্তেসীয় সমীকরণ $x = y = z$, তার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করো।

(ii) যদি $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ এমন দুটি ভেক্টর যে $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ এবং $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$ তাহলে $|\vec{a} - \vec{b}|$ -এর মান নির্ণয় করো।

(e) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

2

(i) নিম্নলিখিত সম্ভাবনা বিভাজনের

$X = x_i$	0	1
P_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

যেখানে $p_i = P(X = x_i)$, গড়মান ও ভেদমান নির্ণয় করো।

(ii) 5 সদস্যবিশিষ্ট একটি পরিবারের যে-কোনো 2 সদস্যের জন্মদিন রবিবার হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

2. (a) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

4

(i) মনে করো : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ এবং $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ চিত্রণ তিনটি যথাক্রমে $f(x) = \cos x$, $g(x) = 2x + 1$ এবং $h(x) = x^3 - x - 6$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। $h \circ (g \circ f)$ চিত্রণটি নির্ণয় করো এবং তারপর $h \circ (g \circ f)(x)$ -এর মান নির্ণয় করো যখন $x = \frac{\pi}{3}$ এবং $x = \frac{2\pi}{3}$ ।

(ii) প্রমাণ করো যে, $\tan^{-1} \frac{1}{x+y} + \tan^{-1} \frac{y}{x^2 + xy + 1} = \cot^{-1} x$ ।

(b) নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও :

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ হলে, দেখাও যে, $A^2 - 4A - 5I = \theta$ এবং এর সাহায্যে A^{-1} নির্ণয় করো যেখানে $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ এবং $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ।

অথবা, Cramer-এর পদ্ধতিটির প্রয়োগে প্রদত্ত সমীকরণগুলির সমাধান করো : $x + y = 1$, $y + z = 2$, $x + z = 3$ ।

(ii) দেখাও যে,
$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$$

অথবা, x -এর জন্য সমাধান করো :
$$\begin{vmatrix} x & c+x & b+x \\ c+x & x & a+x \\ b+x & a+x & x \end{vmatrix} = 0$$

(c) নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও :

4×3=12

(i) $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করো যেখানে, $x = \cos^{-1}(8t^4 - 8t^2 + 1)$; $y = \sin^{-1}(3t - 4t^3)$, $[0 < t < \frac{1}{2}]$

অথবা, যদি $x = 2 \cos \theta - \cos 2\theta$ এবং $y = 2 \sin \theta - \sin 2\theta$ হয়, তবে $\theta = \frac{\pi}{2}$ -তে $\frac{d^2y}{dx^2}$ -এর মান নির্ণয় করো।

(ii) মান নির্ণয় করো : $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{4^x - 2^{x+2} + 5}}$ । অথবা, মান নির্ণয় করো : $\int \frac{3x+5}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$ ।

(iii) সমাধান করো : $(1 + y^2)dx = (\tan^{-1} y - x)dy$, দেওয়া আছে $y = 0$ যখন $x = -1$ ।

অথবা, যদি জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার বছরে 5% হয়, তবে কত বছরে জনসংখ্যা বেড়ে দ্বিগুণ হবে?

(d) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

4

(i) $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{b} = \hat{j} - \hat{k}$ হলে, $\vec{c}$ নির্ণয় করো, যেখানে $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b}$ এবং $\vec{a} \cdot \vec{c} = 3$ ।

(ii) $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{c} = 3\hat{i} + \lambda\hat{j} + 5\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি একতলীয় হলে, λ -এর মান নির্ণয় করো।

(e) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

4

(i) মান নির্ণয় করো (নির্দিষ্ট সমাকলের সাহায্যে) : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{3n}} + \dots + \frac{1}{n} \right]$

* (ii) $\int_0^{\pi/2} \frac{x \sin x \cos x}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^2} dx$ -এর মান নির্ণয় করো।

(f) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

4

(i) একটি দ্বিপদ বিভাজনের গড় এবং ভেদমানের সমষ্টি এবং গুণফল যথাক্রমে 24 ও 128 হলে বিভাজনটি নির্ণয় করো।

(ii) একটি সম্ভাবনা চল X -এর সম্ভাবনা বিভাজন তালিকা নীচে দেওয়া হল :

$X = x_i$	0	1	2
P_i	$3k^3$	$4k - 10k^2$	$5k - 1$

k -এর মান নির্ণয় করো।

3. (a) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

5

(i) একজন পথ্য নির্বাচনকারী দুই প্রকার খাদ্য এইরূপে মিশ্রিত করতে চান যাতে ওই মিশ্রণের প্রতি কেজিতে কমপক্ষে 8 একক ভিটামিন - A এবং 10 একক ভিটামিন - C থাকে। প্রথম প্রকার খাদ্যে ভিটামিন - A এবং ভিটামিন - C-এর পরিমাণ যথাক্রমে 2 একক/কেজি এবং 1 একক/কেজি। দ্বিতীয় প্রকার খাদ্যে ভিটামিন - A ও ভিটামিন - C-এর পরিমাণ যথাক্রমে 1 একক/কেজি এবং 2 একক/কেজি। প্রথম প্রকার খাদ্য কিনতে খরচ 50.00 টাকা/কেজি এবং দ্বিতীয় প্রকার খাদ্য কিনতে খরচ 70.00 টাকা/কেজি। এটিকে একটি রৈখিক প্রোগ্রামের সমস্যা হিসেবে প্রকাশ করো যাতে খাবারের মিশ্রণটির মূল্য সর্বনিম্ন হয়।

(ii) লেখচিত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত অভীষ্ট অপেক্ষক Z -এর চরম মান নির্ণয় করো : $Z = 3x + 5y$

শর্তসাপেক্ষে, $x + 2y \leq 20$, $x + y \leq 15$, $y \leq 6$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ ।

(b) যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

5×2=10

(i) একটি সরল রাস্তার ওপর 2a মিটার উঁচু আলোকস্তম্ভের ওপর আলো আছে। a মিটার উচ্চতা বিশিষ্ট একজন বালক c মিটার/মিনিট বেগে আলোকস্তম্ভের দিকে অগ্রসর হয়। তার ছায়ার দৈর্ঘ্য হ্রাসের হার নির্ণয় করো।

(ii) $\{(x, y) : 0 \leq y \leq x^2 + 1, 0 \leq y \leq x + 1, 0 \leq x \leq 2\}$, অঞ্চলটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

(iii) যদি $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ সরলরেখাটি $x^m y^n = a^{m+n}$ বক্ররেখাটিকে স্পর্শ করে, তাহলে প্রমাণ করো—

$$p^{m+n} \cdot m^m \cdot n^n = a^{m+n} (m+n)^{m+n} \cdot \cos^m \alpha \cdot \sin^n \alpha.$$

(iv) লম্ববৃত্তাকার একটি শঙ্কুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল প্রদত্ত আছে। দেখাও যে, শঙ্কুটির আয়তন সর্ববৃহৎ হবে যদি অর্ধশীর্ষ কোণটি $\sin^{-1} \frac{1}{3}$ হয়।

(c) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

5

- (i) $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}$ সরলরেখার সাপেক্ষে (1, 6, 3) বিন্দুটির প্রতিবিন্দু নির্ণয় করো। প্রতিবিন্দুটি এবং বিন্দুটির মধ্যে দিয়ে যে সরলরেখা যায় তার সমীকরণ নির্ণয় করো।
- (ii) $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) = 5$ এবং $\vec{r} \cdot (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 3$ দুটি তলের ছেদবিন্দুগামী একটি তলের সমীকরণ নির্ণয় করো যা (2, 1, -2) বিন্দুগামী।

PART - B : (Marks - 10)

1. বিকল্প উত্তরগুলির মধ্যে থেকে সঠিক উত্তরটি বেছে নিয়ে লেখো :

1×10=10

(i) m-এর যে মানের জন্য $2x + 3y - z = 5$ এবং $3x - my + 3z = 6$ সমতল দুটি পরস্পর লম্ব, তা হল —

(a) -1, (b) $\frac{1}{2}$, (c) 1, (d) $-\frac{1}{2}$ ।

(ii) যদি $f(x) = \mu x - \sin x$, $x > 0$, একটি সমক্রমী ক্রমবর্ধমান অপেক্ষক হয় তবে— (a) $\mu > -1$, (b) $\mu < 1$, (c) $\mu > 1$, (d) $\mu < -1$ ।

(iii) একটি সম্ভাবনা চলক X-এর সম্ভাবনা বিভাজন $P(x)$ নিম্নরূপ

$$P(X=x) = \begin{cases} K, & \text{যদি } x = 0 \text{ হয়;} \\ 2K, & \text{যদি } x = 1 \text{ হয়;} \\ 3K, & \text{যদি } x = 2 \text{ হয়;} \\ 0, & \text{অন্যান্য ক্ষেত্রে} \end{cases}$$

K একটি ধুবক হলে, K-এর মান হবে—(a) $\frac{1}{2}$, (b) $\frac{1}{4}$, (c) $\frac{1}{5}$, (d) $\frac{1}{6}$ ।

(iv) $P(A \cap B) = \frac{5}{13}$ হলে, $P(A^c \cup B^c)$ -এর মান হবে—(a) $\frac{4}{13}$, (b) $\frac{5}{13}$, (c) $\frac{7}{13}$, (d) $\frac{8}{13}$ ।

(v) λ -এর যে মানের জন্য $\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{b} = 2\hat{i} + 6\hat{j} + \lambda\hat{k}$ ভেক্টর দুটি পরস্পর সমান্তরাল হবে সেটি হল—

(a) 2, (b) -2, (c) $\frac{1}{2}$, (d) $-\frac{1}{2}$ ।

(vi) $\int_{-1}^1 x|x| dx$ -এর মান হবে—(a) 2, (b) $-\frac{1}{2}$, (c) $\frac{1}{2}$, (d) -2।

(vii) যখন $f(2) = 4$, $f'(2) = 4$, তখন $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(2) - 2f(x)}{x-2}$ -এর মান হবে—(a) -4, (b) -2, (c) 2, (d) 0।

(viii) যদি A একটি 2×2 ক্রমের বিপরীতযোগ্য ম্যাট্রিক্স হয়, তাহলে $\det A^{-1}$ -এর মান হবে—

(a) $-\det A$, (b) $\frac{-1}{\det A}$, (c) $\det A$, (d) $\frac{1}{\det A}$ ।

(ix) $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ -এর মান হবে—(a) $\frac{\pi}{6}$, (b) $-\frac{\pi}{6}$, (c) $\frac{\pi}{4}$, (d) $-\frac{\pi}{4}$ ।

(x) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ সেটে একটি সম্বন্ধ $R = \{(1, 1), (2, 2), (4, 4), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ হলে এই সম্বন্ধটি হল —

(a) স্বসম, (b) প্রতিসম, (c) সংক্রমণ, (d) সমতুল্যতা।