$1^{\text{ère}}$ S

Exercices de trigonométrie

1 Soit x un réel quelconque.

Calculer $A=(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2$; $B=\cos^4 x+\sin^4 x+2\cos^2 x\sin^2 x$; $C=\sin^4 x-\cos^4 x+2\cos^2 x$.

2 Dans chaque cas, donner le signe de cos x et sin x en raisonnant graphiquement à l'aide du cercle trigonométrique.

a) $x\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ b) $x\in\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ c) $x\in\left[\pi\,;\frac{3\pi}{2}\right]$

d) $x\in\left[\frac{3\pi}{2}\,;2\pi\right]$ e) $x\in\left[-\frac{\pi}{2}\,;0\right]$ f) $x\in\left[-\pi\,;-\frac{\pi}{2}\right]$

3 Calculer le cosinus et le sinus de $\frac{151\pi}{2}$.

4 Calculer le cosinus et le sinus de $-\frac{1975\pi}{6}$.

5 Calculer le cosinus et le sinus de $\frac{181\pi}{4}$.

6 Soit α le réel dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ tel que $\sin\alpha=\frac{3}{5}$.

1°) Construire le point M, image de α sur le cercle trigonométrique.
2°) Calculer $\cos\alpha$.

7 Dans chaque cas, déterminer une relation entre les deux nombres

a) $\cos\frac{2\pi}{9}$ et $\cos\frac{7\pi}{9}$ b) $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{6\pi}{5}$ c) $\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$

8 Soit x un réel quelconque. Calculer les expressions suivantes en détaillant toutes les étapes.

$A=\cos(5\pi+x)+\sin(5\pi-x)-\cos(7\pi+x)+\sin(7\pi+x)$ et $B=\cos(\pi-x)+\cos(5\pi+x)+2\cos(-x)$.

9 On donne $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. Calculer la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{8}$.

10 Calculer, en regroupant astucieusement les termes la somme $A=\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}$.

11 Calculer en regroupant astucieusement certains termes l'expression

$A=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$.

12 Soit x un réel quelconque. Simplifier l'expression $A=\cos(17\pi+x)+\sin\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)+\sin\left(x-\frac{11\pi}{2}\right)$.

13 Soit x un réel quelconque dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{3}\,;\frac{3\pi}{4}\right]$.

A l'aide du cercle trigonométrique, donner le meilleur encadrement possible de $\cos x$. Faire une figure.

Dans les exercices **14** et **15**, le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct $(\text{O},\vec{i},\vec{j})$.

14 On note M le point de coordonnées cartésiennes $(-4\,;4\sqrt{3})$.

Déterminer un système de coordonnées polaires de M en rédigeant.
Faire une figure en plaçant M au compas (en utilisant les coordonnées polaires trouvées précédemment).

15 On note M et N les points admettant pour systèmes de coordonnées polaires les couples respectifs $\left(3\,;-\frac{2\pi}{3}\right)$ et $\left(5\,;\frac{\pi}{3}\right)$.

1°) Construire M et N au compas.
2°) Démontrer que O, M, N sont alignés.
3°) Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{\text{ON}}=k\overrightarrow{\text{OM}}$.

Réponses

1 $A=2$; $B=1$; $C=1$

Cet exercice permet de comprendre que les identités remarquables ça marche aussi avec les sinus et les cosinus.

Démarche pour *A* :

On développe les deux carrés avec les identités remarquables.

$A=(\cos x)^2+(\sin x)^2+2\cos x\times\sin x+(\cos x)^2+(\sin x)^2-2\cos x\times\sin x$

$A=\underbrace{\cos^2 x+\sin^2 x}_{1}+\cancel{2\cos x\times\sin x}+\underbrace{\cos^2 x+\sin^2 x}_{1}\cancel{-2\cos x\times\sin x}$

(avec les écritures simplifiées : $(\cos x)^2=\cos^2 x$ et $(\sin x)^2=\sin^2 x$)

Démarche pour *B* :

$B=(\cos^2 x+\sin^2 x)^2=1^2=1$

Démarche pour *C* :

$C=\sin^4 x-\cos^4 x+2\cos^2 x$

$C=\underbrace{(\sin^2 x+\cos^2 x)}_{1}(\sin^2 x-\cos^2 x)+2\cos^2 x$

Petit complément pour la factorisation de $\sin^4 x-\cos^4 x$ qui peut bloquer les élèves.

Cela est en lien avec une factorisation de a^4-b^4 où a et b sont deux réels.

$a^4-b^4=(a^2-b^2)(a^2+b^2)=(a+b)(a-b)(a^2+b^2)$

2 **Signe du cosinus et du sinus d'un réel**

On note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct $(\text{O},\vec{i},\vec{j})$.
Faire une figure.

Sur la figure, on place les points A(1 ; 0), B(0 ; 1), A'(– 1 ; 0), B'(0 ; – 1).

On note M l'image de x sur le cercle $\mathcal{C}$.

a) $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc M appartient à l'arc $\overset{\frown}{AB}$. Par suite, l'abscisse de M est positive ou nulle et l'ordonnée de M est positive ou nulle. Donc $\cos x \geqslant 0$ et $\sin x \geqslant 0$.	b) $x \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ donc M appartient à l'arc $\overset{\frown}{A'B}$. Par suite, l'abscisse de M est négative ou nulle et l'ordonnée de M est positive ou nulle. Donc $\cos x \leqslant 0$ et $\sin x \geqslant 0$.	c) $x \in \left[\pi\,;\frac{3\pi}{2}\right]$ donc M appartient à l'arc $\overset{\frown}{A'B'}$. Par suite, l'abscisse de M est négative ou nulle et l'ordonnée de M est négative ou nulle. Donc $\cos x \leqslant 0$ et $\sin x \leqslant 0$.
d) $x \in \left[\frac{3\pi}{2}\,;2\pi\right]$ donc M appartient à l'arc $\overset{\frown}{AB'}$. Par suite, l'abscisse de M est positive ou nulle et l'ordonnée de M est négative ou nulle. Donc $\cos x \geqslant 0$ et $\sin x \leqslant 0$.	e) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;0\right]$ donc M appartient à l'arc $\overset{\frown}{AB'}$. Par suite, l'abscisse de M est positive ou nulle et l'ordonnée de M est négative ou nulle. Donc $\cos x \geqslant 0$ et $\sin x \leqslant 0$.	f) $x \in \left[-\pi\,;-\frac{\pi}{2}\right]$ donc M appartient à l'arc $\overset{\frown}{A'B'}$. Par suite, l'abscisse de M est négative ou nulle et l'ordonnée de M est négative ou nulle. Donc $\cos x \leqslant 0$ et $\sin x \leqslant 0$.

Il faut savoir retrouver très vite tous les résultats de cet exercice.

Etape 1 : Repérer l'arc sur le cercle trigonométrique correspondant à l'intervalle cité.
Etape 2 : Placer un point au hasard sur cet arc
Etape 3 : Faire apparaître le cosinus sur l'axe des abscisses et le sinus sur l'axe des ordonnées.
Etape 4 : Repérer graphiquement le signe de cos x et sin x.

Etape 5 : Conclure à l'aide des signes $\geqslant$ et $\leqslant$ (exemple : $\cos x \geqslant 0$, $\sin x \geqslant 0$)

N.B. : attention, cos x et sin x peuvent être nuls ; ainsi $\cos x = 0$ ou $\sin x = 0$

3 $\frac{151\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2\times 38\pi$ (même démarche que pour une mesure principale).

$\cos\frac{151\pi}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2\times 38\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\frac{151\pi}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\times 38\pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

4 $-\frac{1975\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} - 165\times 2\pi$

$\cos\left(-\frac{1975\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6} - 165\times 2\pi\right) = \cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{1975\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6} - 165\times 2\pi\right) = \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$

5 On a : $180 < 181 < 184$ soit $4\times 45 < 181 < 4\times 46$.

$\frac{181\pi}{4} = 23\times 2\pi - \frac{3\pi}{4}$

$\cos\frac{181\pi}{4} = \cos\left(23\times 2\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\frac{181\pi}{4} = \sin\left(23\times 2\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Comment fait-on pour $-\frac{3\pi}{4}$?

Deux démarches possibles :

- soit on utilise le cercle trigonométrique en plaçant les valeurs des angles associés à $\frac{\pi}{4}$;
- soit on utilise les relations donnant le cosinus et le sinus de $-x$ en fonction du cosinus et du sinus de x.

6 1°) On sait que $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ donc $M \in \overset{\frown}{A'B}$ (car l'image du réel $\frac{\pi}{2}$ sur le cercle trigonométrique est le point B ; l'image du réel π sur le cercle trigonométrique est le point A').

On fait une figure.

M est le point du cercle trigonométrique situé sur l'arc $\overset{\frown}{A'B}$ qui a pour ordonnée $\frac{3}{5}$.

2°) D'après la relation fondamentale, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

D'où $\cos^2\alpha + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$

soit $\cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25}$

ce qui donne $\cos^2\alpha = \frac{9}{25}$

D'où $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ ou $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.

Or $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$. Donc $\cos\alpha \leq 0$.

D'où $\boxed{\cos\alpha = -\frac{4}{5}}$.

Bilan :

Etape 1 : Placer le point M en fonction de son ordonnée et de son intervalle (arc) ; placer sin α.
Etape 2 : Faire apparaître cos α.
Etape 3 : Appliquer la relation fondamentale $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.
Etape 4 : Résoudre
Etape 5 : Conclure
Ne pas oublier qu'une équation du type $x^2 = a$ où a est un réel strictement positif admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$.

Le choix de l'une des deux solutions dépend de l'emplacement de cos α sur le graphique.

$\boxed{7}$ a) $\cos\frac{2\pi}{9}=-\cos\frac{7\pi}{9}$ b) $\cos\frac{\pi}{5}=-\cos\frac{6\pi}{5}$ c) $\cos\frac{3\pi}{8}=\sin\frac{\pi}{8}$.

Explication :

$\cos\frac{2\pi}{9}=\cos\left(\pi-\frac{7\pi}{9}\right)=-\cos\frac{7\pi}{9}$

$\cos\frac{\pi}{5}=\cos\left(\frac{6\pi}{5}-\pi\right)=\cos\left[-\left(\frac{6\pi}{5}-\pi\right)\right]=\cos\left(\pi-\frac{6\pi}{5}\right)=-\cos\frac{6\pi}{5}$

$\cos\frac{3\pi}{8}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=\sin\frac{\pi}{8}$

$\boxed{8}$ $A=0$ et $B=0$

$A=\cos(5\pi+x)+\sin(5\pi-x)-\cos(7\pi+x)+\sin(7\pi+x)$

$A=\cos(4\pi+\pi+x)+\sin(4\pi+\pi-x)-\cos(6\pi+\pi+x)+\sin(6\pi+\pi+x)$ (étape à écrire obligatoirement)

$A=\cos(\pi+x)+\sin(\pi-x)-\cos(\pi+x)+\sin(\pi+x)$

$A=-\cos x+\sin x-(-\cos x)-\sin x$ (on applique les propriétés du cours)

$A=-\cos x+\sin x+\cos x-\sin x$

$A=-\cos x+\sin x+\cos x-\sin x$

$\boxed{A=0}$

$B=\cos(\pi-x)+\cos(5\pi+x)+2\cos(-x)$.

$B=\cos(\pi-x)+\cos(4\pi+\pi+x)+2\cos(-x)$

$B=-\cos x+\cos(\pi+x)+2\cos x$

$B=-\cos x-\cos x+2\cos x$

$\boxed{B=0}$

$\boxed{9}$ $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Détail de la démarche :

D'après la relation fondamentale, on a : $\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}=1$.

On en déduit que $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^2+\sin^2\frac{\pi}{8}=1$

D'où : $\frac{\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2}{4}+\sin^2\frac{\pi}{8}=1$ (le carré fait « exploser » la racine carrée au numérateur ; principe d'explosion d'une racine carrée sous l'effet d'un carré).

Soit $\frac{2+\sqrt{2}}{4}+\sin^2\frac{\pi}{8}=1$

On a donc :

$\sin^2\frac{\pi}{8}=1-\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

$\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{4-2-\sqrt{2}}{4}$

$\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

Or $\frac{\pi}{8}\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Donc $\sin\frac{\pi}{8}\geq 0$.

On en déduit que $\boxed{\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$.

$\boxed{10}$ $A=\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}$.

Solution fausse :

On regroupe tout dans un même cosinus.

$A=\cos\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}+\frac{3\pi}{5}+\frac{4\pi}{5}\right)=\cos(2\pi)=1$

On obtient un résultat faux.

Il n'y a pas de règle qui dise que $\cos a+\cos b=\cos(a+b)$.

Solution juste :

On peut placer sur un cercle trigonométrique les images des réels $\frac{\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$.

On observe alors que les points sont deux à deux symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
On va ainsi pouvoir faire la démonstration.

$A=\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)$

$A=\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{5}$ (on utilise la règle : $\cos(\pi-x)=-\cos x$)

$A=0$

On peut vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice.

$\boxed{11}$ $A=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$.

Pour commencer, une remarque sur les notations : $\cos^2\frac{\pi}{8}=\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2\neq\cos\frac{\pi^2}{64}$.

Une première solution fausse (mais tentante) :

On regroupe tout dans un même cosinus.

$A=\cos^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}+\frac{5\pi}{8}+\frac{7\pi}{8}\right)=\cos^2(2\pi)=1$

On obtient un résultat faux.

Une deuxième solution fausse (mais tentante) :

$$A=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)$$
$$A=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}-\cos^2\frac{\pi}{8}-\cos^2\frac{3\pi}{8}$$
$$A=0$$

Où se situe la faute ?

$$A=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)$$
$$A=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\left(-\cos\frac{\pi}{8}\right)^2+\left(-\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2 \quad *$$
$$A=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2+\left(\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2$$
$$A=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}$$
$$A=2\cos^2\frac{\pi}{8}+2\cos^2\frac{3\pi}{8}$$
$$A=...$$

On verra la fin dans la solution juste.

*
Dans la solution fausse, l'erreur se situait avec les – et les carrés.
La notation $\cos^2 x$ est pratique mais peut s'avérer dangereuse si l'on en connaît mal la signification.

Ainsi $\cos^2(\pi-x)=\left[\cos(\pi-x)\right]^2=(-\cos x)^2=\cos^2 x$.
On ne peut pas écrire $\cos^2(\pi-x)=-\cos^2 x$.

Solution juste :

$$A=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)$$
$$A=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\left(-\cos\frac{\pi}{8}\right)^2+\left(-\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2 \quad *$$
$$A=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2+\left(\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2$$
$$A=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}$$
$$A=2\cos^2\frac{\pi}{8}+2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$$
$$A=2\cos^2\frac{\pi}{8}+2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right]^2$$
$$A=2\cos^2\frac{\pi}{8}+2\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^2$$

$$A=2\left(\underbrace{\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}}_{1}\right)$$
$$A=2\times1$$
$$A=2$$

12 $A=-\cos x$

Détail de la démarche (étape par étape) :

$$A=\cos(17\pi+x)+\sin\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)+\sin\left(x-\frac{11\pi}{2}\right).$$
$$A=\cos(2\pi\times8+\pi+x)+\sin\left(\frac{8\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin\left(x-\frac{12\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$A=\cos(\pi+x)+\sin\left(4\pi-\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin\left(x-6\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$A=-\cos x+\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$A=-\cos x+\sin\left[-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$A=-\cos x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos x$$
$$A=-\cos x\cancel{-\cos x}\cancel{+\cos x}$$
$$A=-\cos x$$

13 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq\cos x\leq\frac{1}{2}$

Méthode : on trace un cercle trigonométrique. Sur ce cercle, on place les points U et V, images respectives des réels $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{3\pi}{4}$.
On trace l'arc $\overset{\frown}{\text{UV}}$ en rouge.
On regarde ensuite en abscisse.

14 Le point M admet le couple $\left(8\ ;\ \frac{2\pi}{3}\right)$ pour système de coordonnées polaires.
On peut ensuite placer le point M (on trace d'abord le cercle de centre O et de rayon 8).

15 1°) 2°) On détermine une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{OM}},\overrightarrow{\text{ON}}\right)$.

La relation de Chasles permet d'écrire : $\left(\overrightarrow{\text{OM}},\overrightarrow{\text{ON}}\right)=\left(\overrightarrow{\text{OM}},\vec{i}\right)+\left(\vec{i},\overrightarrow{\text{ON}}\right)=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\pi$.

Ce résultat permet de dire que les vecteurs $\overrightarrow{\text{OM}}$ et $\overrightarrow{\text{ON}}$ sont colinéaires (de sens contraires).
Donc les points O, M, N sont alignés.
3°)
$$\left\|\overrightarrow{\text{ON}}\right\|=\left\|k\overrightarrow{\text{OM}}\right\|$$
$$\left\|\overrightarrow{\text{ON}}\right\|=|k|\left\|\overrightarrow{\text{OM}}\right\|$$

$\mathrm{ON} = |k| \times \mathrm{OM}$

$5 = |k| \times 3$

$|k| = \dfrac{5}{3}$

Or les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ sont colinéaires et de sens contraires donc $k < 0$.

$-k = \dfrac{5}{3}$

On obtient donc $k = -\dfrac{5}{3}$.

Travail personnel

Séquence bac

Page 256 exercices 1 et 2
Pages 264 et 265 exercices 1, 2, 3, 5, 6