

HIGHER SECONDARY EXAMINATION (XII) – 2018

PART – A : (Marks – 70)

2

1. (a) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

(i) মনে করো, সব বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$ এবং $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ চিত্রণ $f(x) = 2x^2 - 5x + 6$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। $f^{-1}(3)$ -এর মান নির্ণয় করো।

(ii) যদি $\sin^{-1} x = \tan^{-1} y$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = 1$ ।

(b) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

2

(i) নির্ণায়কের বিস্তার না করে প্রমাণ করো, $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$ ।

(ii) ধরা যাক, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$ এবং I দ্বিতীয় ক্রমের একক ম্যাট্রিক্স। যদি $A^2 = 8A + kI$ হয় তবে k-এর মান নির্ণয় করো।

(c) যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

2×3=6

(i) $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(ax)}{x^2}, & \text{যখন } x \neq 0 \\ 1, & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

অপেক্ষকটি $x = 0$ বিন্দুতে সন্তুত হলে a-এর মানগুলি নির্ণয় করো।

(ii) যদি $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$ ।

(iii) যদি $x > 0, y > 0$ এবং $xy = 25$ হয় তবে $x + y$ -এর লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় করো।

(iv) $y^2 = 4x$ অধিবৃত্ত বরাবর গতিশীল কোনো বস্তুকণার যে বিন্দুতে ভূজের বৃদ্ধির হার কোটির বৃদ্ধির হারের দ্বিগুণ, সেই বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

(v) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ অপেক্ষকের ক্ষেত্রে $4 \leq x \leq 6$ বিস্তারে লাগ্রাঞ্জের মধ্যম মান উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই করো।

(vi) মান নির্ণয় করো : $\int \frac{(x+1)e^x}{\cos^2(xe^x)} dx$ ।

(d) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

2

(i) যদি $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ তিনটি ভেক্টর এমন যে, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ এবং $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, |\vec{c}| = 5$ হলে, দেখাও যে, $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = -25$ ।

(ii) $2x + y + 2z = 9$ এবং $4x - 5y - 4z = 1$ সমতল দুটির ছেদবিন্দুগামী যে সমতল $(3, 2, -1)$ বিন্দুগামী তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

(e) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

2

(i) $P(A/B) = 0.8, P(B/A) = 0.6$ এবং $P(A^c \cup B^c) = 0.7$ হলে, $P(A \cup B)$ -এর মান নির্ণয় করো।

(ii) একটি বৌকশূন্য মুদ্রা 6 বার টস করা হলে দ্বিপদ বিভাজনের প্রয়োগে কমপক্ষে 5 বার হেড পড়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

2. (a) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

4

(i) স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহের সেট $\mathbb{N}$ -এর ওপর একটি সম্বন্ধ R প্রদত্তরূপে সংজ্ঞাত : $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N} \text{ এবং } 2x + y = 41\}$ দেখাও যে, $\mathbb{N}$ -এর ওপর সংজ্ঞাত R সম্বন্ধটি স্বসম বা প্রতিসম বা সংক্রমণশীল বা কোনোটিই নয়।

(ii) প্রমাণ করো যে, $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{a}{b}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{a}{b}\right) = \frac{2b}{a}$ ।

(b) নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও :

4×2=8

(i) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটিকে একটি প্রতিসম এবং একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের যোগফলরূপে প্রকাশ করো।

অথবা, বিপরীত ম্যাট্রিক্স পদ্ধতির প্রয়োগে সমাধান করো :

$2x - 3y + 3z = 1, 2x + 2y + 3z = 2, 3x - 2y + 2z = 3$ ।

(ii) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & -1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$ হলে, x-এর মান নির্ণয় করো।

অথবা, প্রমাণ করো, $\begin{vmatrix} -bc & b^2 + bc & c^2 + bc \\ a^2 + ac & -ac & c^2 + ac \\ a^2 + ab & b^2 + ab & -ab \end{vmatrix} = (ab + bc + ca)^3$ ।

(c) নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও :

4×3=12

(i) যদি $y = \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} - y = 0$ ।

অথবা, $x = 0$ -তে $\tan^{-1}\left(\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}\right)$ -এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ -এর অন্তরকলন নির্ণয় করো।

(ii) মান নির্ণয় করো : $\int \frac{x^4+1}{x^6+1} dx$ ।

অথবা, মান নির্ণয় করো : $\int \frac{dx}{\cos x + \sqrt{3} \sin x}$ ।

(iii) সমাধান করো : $x \frac{dy}{dx} = y + x \tan \frac{y}{x}$; প্রদত্ত আছে যে, $y = \frac{\pi}{2}$ যখন $x = 1$ ।

অথবা, সমাধান করো : $(1-x^2) \frac{dy}{dx} - xy = 1$ ।

(d) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

4

(i) $\vec{a}$, $\vec{b}$ ও $\vec{c}$ ভেক্টর তিনটির মান যথাক্রমে 3, 4 এবং 5; ভেক্টর তিনটি এমন যে, প্রত্যেক ভেক্টর অন্য দুটি ভেক্টরের সমষ্টির ওপর লম্ব। প্রমাণ করো যে, $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 5\sqrt{2}$ ।

(ii) ধরা যাক, $\vec{a} = \hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}$ এবং $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$; একটি ভেক্টর $\vec{d}$ নির্ণয় করো, যেটি $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ উভয়ের ওপর লম্ব এবং $\vec{c} \cdot \vec{d} = 18$ ।

(e) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

4

(i) মান নির্ণয় করো (নির্দিষ্ট সমাকলের সাহায্যে) : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1^2}{n^3+1^3} + \frac{2^2}{n^3+2^3} + \frac{3^2}{n^3+3^3} + \dots + \frac{1}{2n} \right]$ ।

(ii) মান নির্ণয় করো : $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ ।

(f) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

4

(i) একটি থলিতে 8 টি সাদা ও 7 টি কালো বল আছে এবং অপর একটি থলিতে 5 টি সাদা ও 4 টি কালো বল আছে। প্রথম থলি থেকে উদ্দেশ্যহীনভাবে একটি বল তুলে দ্বিতীয় থলিতে রাখা হল। এখন দ্বিতীয় থলি থেকে উদ্দেশ্যহীনভাবে একটি বল তোলা হলে, তোলা বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

(ii) X ও Y দুটি স্বাধীন চলক হলে প্রমাণ করো যে, $\text{var}(aX + bY) = a^2 \text{var}(X) + b^2 \text{var}(Y)$, যেখানে a এবং b ধ্রুবক।

3. (a) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

5

(i) প্রতি কিগ্রা X খাদ্যে 6 একক ভিটামিন-A ও 7 একক ভিটামিন-B আছে। প্রতি কিগ্রা Y খাদ্যে 8 একক ভিটামিন-A ও 12 একক ভিটামিন-B আছে। প্রতি কিগ্রা X ও Y খাদ্যের দাম যথাক্রমে 12 টাকা ও 20 টাকা। দৈনিক খাদ্যের পরিমাণে কমপক্ষে 100 একক ভিটামিন-A ও 120 একক ভিটামিন-B থাকা প্রয়োজন। X ও Y খাদ্য দুটি কী পরিমাণে মেশালে প্রয়োজনীয় ভিটামিন থাকবে এবং দামও সবচেয়ে কম হবে? সমস্যাটিকে রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যায় প্রকাশ করো।

(ii) লেখচিত্রের সাহায্যে রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাটির সমাধান করো এবং অভীষ্ট অপেক্ষক Z -এর অবম মান নির্ণয় করো : (ছক কাগজের প্রয়োজন নেই)

$$Z = 6x + 10y$$

$$\text{শর্তসাপেক্ষে, } x + 2y \geq 10; 2x + 2y \geq 12; 3x + y \geq 8; x, y \geq 0$$

(b) যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

5×2=10

(i) একটি বৃত্তাকার কালির ফাঁটা সেকেন্ডে 2 বর্গসেমি হারে বড়ো হয়। $2\frac{6}{11}$ সেকেন্ড পরে তার ব্যাসার্ধ কী হারে বৃদ্ধি পাবে তা নির্ণয় করো।

(ii) নির্দিষ্ট সমাকলের সাহায্যে $2x + y = 4$ সরলরেখা এবং $y = 4 - x^2$ বক্র দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

(iii) $\ell x + my = n$ সরলরেখাটি $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের অভিলম্ব হলে কলনবিদ্যার সাহায্যে প্রমাণ করো যে, $\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{b^2}{m^2} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{n^2}$ ।

(iv) সমাধান করো : $(2x - 10y^3) \frac{dy}{dx} + y = 0$ ।

(c) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

- (i) মূলবিন্দু থেকে $\frac{6}{\sqrt{29}}$ একক দূরত্বে অবস্থিত এবং $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ ভেক্টরের ওপর লম্ব সমতলটির ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করো এবং একে কার্তেসীয় আকারের সমীকরণে পরিবর্তিত করো।
- (ii) $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{3}$ ও $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+5}{5}$ সরলরেখা দুটির প্রত্যেকটির ওপর লম্ব যে সরলরেখা (1, 2, 3) বিন্দুগামী তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

PART - B : (Marks - 10)

1. বিকল্প উত্তরগুলির মধ্যে থেকে সঠিক উত্তরটি বেছে নিয়ে লেখো :

1×10=10

- (i) যদি A একটি 3×3 ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স হয়, $|KA|$ -এর মান হবে — (a) $K|A|$, (b) $K^2|A|$, (c) $K^3|A|$, (d) $3K|A|$ ।
- (ii) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ($x \neq 0$) অপেক্ষকটি $x = 0$ বিন্দুতে সন্তুষ্ট হলে, $f(0)$ -এর মান হবে — (a) 0, (b) 1, (c) π , (d) $\frac{\pi}{2}$ ।
- (iii) $y = mx + 1$ সরলরেখাটি $y^2 = 4x$ অধিবৃত্তের (1, 2) বিন্দুতে স্পর্শক হলে m-এর মান হবে — (a) 1, (b) 2, (c) -1, (d) -2।
- (iv) ভেক্টর $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ -এর ভেক্টর $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ -এর ওপর অভিক্ষেপ হবে — (a) $\frac{5}{\sqrt{6}}$ একক, (b) $\frac{2}{\sqrt{6}}$ একক, (c) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ একক, (d) $\frac{4}{\sqrt{5}}$ একক।
- (v) একটি বৌদ্ধশূন্য পাশা একবার ছোঁড়া হলে পাশার প্রাপ্ত অঙ্ক যদি X সমসত্ত্ব চলক হয়, তবে $\bar{X}$ -এর মান হবে — (a) 7, (b) 14, (c) $\frac{7}{2}$, (d) $\frac{1}{6}$ ।
- (vi) A ও B দুটি স্বাধীন ঘটনা এবং $P(A) = \frac{3}{5}$ ও $P(A \cap B) = \frac{4}{9}$ হলে, $P(B)$ -এর মান হবে — (a) $\frac{5}{9}$, (b) $\frac{8}{9}$, (c) $\frac{5}{27}$, (d) $\frac{20}{27}$ ।
- (vii) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ -এর মুখ্য মান হবে — (a) $\frac{\pi}{3}$, (b) $\frac{\pi}{4}$, (c) $-\frac{\pi}{4}$, (d) $-\frac{\pi}{3}$ ।
- (viii) ধরা যাক, $A = \{1, 2, 3\}$ এবং A সেটে সংজ্ঞাত R সম্বন্ধ হল, $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$; তবে R সম্বন্ধটি হবে — (a) স্বসম, (b) প্রতিসম, (c) সংক্রমণশীল, (d) এদের কোনোটিই নয়।
- (ix) $\int e^{a \log_e x} dx$ -এর মান হবে — (a) $\frac{1}{a} e^{a \log_e x} + c$, (b) $\frac{1}{x} + c$, (c) $ax^{a-1} + c$, (d) $\frac{x^{a+1}}{a+1} + c$ ।
- (x) $\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{0} = \frac{z-2}{5}$ সরলরেখাটি লম্ব হয় — (a) x অক্ষের ওপর, (b) y অক্ষের ওপর, (c) z অক্ষের ওপর, (d) x অক্ষ ও z অক্ষ উভয়ের ওপর।