

2

1. (a) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

(i) R একটি সম্বন্ধ যেখানে $R = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N} \text{ এবং } x + 3y = 12\}$ হলে, R-এর ক্ষেত্র এবং পাল্লা নির্ণয় করো।

(ii) মান নির্ণয় করো : $\sec^2(\tan^{-1} 2) + \operatorname{cosec}^2(\cot^{-1} 3)$ ।

2

(b) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

(i) দেখাও যে, $A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ একটি প্রকৃত লম্ব ম্যাট্রিক্স।

(ii) প্রমাণ করো যে, $\begin{vmatrix} 1 & \log_x y & \log_x z \\ \log_y x & 1 & \log_y z \\ \log_z x & \log_z y & 1 \end{vmatrix} = 0$ ।

2×3=6

(c) যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

(i) $x = \sqrt{a \sin^{-1} t}$ এবং $y = \sqrt{a \cos^{-1} t}$ হলে দেখাও যে, $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ ।

(ii) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ অপেক্ষকের ক্ষেত্রে $1 \leq x \leq 3$ বিস্তারে রোলার উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই করো।

(iii) মান নির্ণয় করো : $\int \frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x} dx$ ।

(iv) একটি কণা u গতিবেগে একটি সরলরেখায় যাত্রা শুরু করে; কণাটির ত্বরণ সর্বদা সরণের সঙ্গে সমান। যদি x সরণ হলে গতিবেগ v হয়, তবে দেখাও যে, $v^2 = u^2 + x^2$ ।

(v) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ যে বিস্তারে ক্ষয়িষ্ণু সেটি নির্ণয় করো।

(vi) যদি $f(x) = f(a+x)$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে, $\int_a^{a+t} f(x) dx$ -এর মান a নিরপেক্ষ।

2

(d) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

(i) $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} + 9\hat{k}$ এবং $\vec{b} = \hat{i} + \lambda\hat{j} + 3\hat{k}$ হলে, λ -এর মান নির্ণয় করো যাতে $(\vec{a} + \vec{b})$ এবং $(\vec{a} - \vec{b})$ ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব হয়।

(ii) $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ বিন্দুগামী এবং $\vec{r} \cdot (2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) = 5$ সমতলের সমান্তরাল সমতলের ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করো।

2

(e) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

(i) $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ এবং $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ হলে, $P(A \cap B^c)$ -এর মান নির্ণয় করো।

(ii) X একটি বিচ্ছিন্ন যথেষ্ট চলক হলে, দেখাও যে, $E(X - \bar{X}) = 0$ ।

4

2. (a) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

(i) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ সেটের ওপর একটি প্রক্রিয়া '*' নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞাত :

$a * b = ab \pmod{5}$, সকল $a, b \in A$; A-এর ওপর '*' প্রক্রিয়ার জন্য একটি বিভাজন ছক তৈরি করো এবং ছক থেকে দেখাও যে, '*' একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া এবং প্রক্রিয়াটি A সেটে বিনিময়যোগ্য।

(ii) সমাধান করো : $\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1) = \tan^{-1} \frac{8}{31}$ ।

4×2=8

(b) নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও :

(i) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ হলে দেখাও যে, $A^2 - 5A + 7I_2 = O$; অতঃপর A^{-1} নির্ণয় করো।

অথবা, Cramer-এর নিয়ম প্রয়োগে সমাধান করো : $x + 3y = 4$; $y + 3z = 7$; $4x + z = 6$ ।

(ii) প্রমাণ করো যে, $\begin{vmatrix} 2ab & a^2 & b^2 \\ a^2 & b^2 & 2ab \\ b^2 & 2ab & a^2 \end{vmatrix} = -(a^3 + b^3)^2$ ।

অথবা, বিস্তৃত না করে দেখাও যে, $\begin{vmatrix} a^2+10 & ab & ac \\ ab & b^2+10 & bc \\ ac & bc & c^2+10 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটি 100 দ্বারা বিভাজ্য।

(c) নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও :

4×3=12

(i) $f(x) = \left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{a+b+2x}$ হলে প্রমাণ করো যে, $f'(0) = \left[2 \log \frac{a}{b} + \frac{b^2-a^2}{ab}\right] \left(\frac{a}{b}\right)^{a+b}$ ।

অথবা, $p^2 = a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta$ হলে দেখাও যে, $p + \frac{d^2 p}{d\theta^2} = \frac{a^2 b^2}{p^3}$ ।

(ii) মান নির্ণয় করো : $\int \cos^{-1} \sqrt{\frac{x}{a+x}} dx$ । অথবা, মান নির্ণয় করো : $\int \frac{x dx}{x^4 - x^2 + 1}$ ।

(iii) সমাধান করো : $y dx - (x + 2y^2) dy = 0$ ।

অথবা, জীবাণু নিয়ে কোনো একটি গবেষণায় দেখা যায় যে, কোনো সময়ে জীবাণুর সংখ্যা যে হারে বৃদ্ধি পায় তা ওই সময়ে জীবাণুর সংখ্যার ঘনমূলের সমানুপাতিক। যদি 3 ঘন্টায় জীবাণুর সংখ্যা 8 গুণ হয় তবে কত সময়ে ওই সংখ্যা 64 গুণ হবে।

(d) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

4

(i) A, B, C এবং D চারটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $4\hat{i} + 8\hat{j} + 12\hat{k}$, $2\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$, $3\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $5\hat{i} + 8\hat{j} + 5\hat{k}$; ভেক্টর পদ্ধতি প্রয়োগ করে প্রমাণ করো যে, A, B, C এবং D বিন্দু চারটি একতলীয়।

(ii) প্রমাণ করো যে, $\left(\vec{\beta} - \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2} \vec{\alpha}\right)$ ভেক্টরটি $\vec{\alpha}$ -এর সঙ্গে লম্ব।

(e) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

4

(i) মান নির্ণয় করো : $\int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan \theta) d\theta$ ।

(ii) নির্দিষ্ট সমাকলের সংজ্ঞা থেকে $\int_1^2 5x^2 dx$ -এর মান নির্ণয় করো।

(f) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

4

(i) এটা জানা আছে যে, এক ব্যক্তি 4 বার কথা বললে তার মধ্যে 3 বার সত্য কথা বলেন। তিনি একটা ঝোঁকহীন ছক্কা ছোঁড়েন এবং বলেন যে, 6 পড়েছে। সত্যিই যে 6 পড়েছিল তার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

(ii) কোনো সমসত্ত্ব পরীক্ষা যখন 5 বার পুনরাবৃত্ত হয় তখন একটি দ্বিপদ বিভাজনের মধ্যক ও ভেদমানের সমষ্টি 1.8 হলে, দ্বিপদ বিভাজনটি নির্ণয় করো।

3. (a) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

5

(i) একজন কৃষক কয়েকটি ভেড়া ও ছাগল ক্রয় করেন। একটি ভেড়া ও একটি ছাগলের দাম যথাক্রমে 150 টাকা ও 200 টাকা। প্রতিটি ভেড়া ও ছাগল বিক্রি করে কৃষক যথাক্রমে 15 টাকা এবং 20 টাকা লাভ করেন। তাঁর কাছে মাত্র 6000 টাকা আছে এবং তাঁর খোঁয়াড়ে 100 টির বেশি পশু রাখা যাবে না। তিনি উভয় প্রকারের পশুই কিনতে চান, যাতে তাঁর লাভ সবচেয়ে বেশি হয়। সমস্যাটি রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যা হিসেবে প্রকাশ করো।

(ii) লেখচিত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাটির সমাধান করো এবং Z-এর চরম মান নির্ণয় করো। (ছক কাগজের প্রয়োজন নেই) : $Z = x + y$
শর্তসাপেক্ষে, $5x + 10y \leq 50$; $x + y \geq 1$; $y \leq 4$; $x, y \geq 0$ ।

(b) যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

5×2=10

(i) কলনবিদ্যার সাহায্যে দেখাও যে, $\left(\frac{1}{x}\right)^x$ অপেক্ষকটির চরম মান e^{-1} ।

(ii) সমাকলনের সাহায্যে প্রমাণ করো যে, $y^2 = 4x$ এবং $x^2 = 4y$ বক্রদুটির অন্তর্গত সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল $\frac{16}{3}$ বর্গএকক।

(iii) $\frac{x}{h} + \frac{y}{k} = 1$ সরলরেখা $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1$ বক্রকে স্পর্শ করলে দেখাও যে, $\left(\frac{a}{h}\right)^{\frac{n}{n-1}} + \left(\frac{b}{k}\right)^{\frac{n}{n-1}} = 1$ ।

(iv) সমাধান করো : $x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$ ।

(c) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

5

- (i) $\vec{r} = -4\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k} + \lambda_1(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$ এবং $\vec{r} = -3\hat{i} - 8\hat{j} - 3\hat{k} + \lambda_2(2\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k})$ সরলরেখা দুটির মধ্যবর্তী ন্যূনতম দূরত্ব নির্ণয় করো।
- (ii) একটি পরিবর্তনশীল সমতল মূলবিন্দু থেকে সর্বদা p একক দূরে অবস্থিত এবং অক্ষ তিনটিকে যথাক্রমে A , B ও C বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে, $OABC$ চতুর্ভুজটির ভরকেন্দ্রের সম্ভারপথের সমীকরণ হবে, $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{16}{p^2}$ ।

PART - B : (Marks - 10)

1. বিকল্প উত্তরগুলির মধ্যে থেকে সঠিক উত্তরটি বেছে নিয়ে লেখো :

1×10=10

- (i) যদি A ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্সের অস্তিত্ব থাকে, তবে $\det(A^{-1})$ -এর মান হবে — (a) 0, (b) 1, (c) $\frac{1}{\det A}$, (d) $\det A$ ।
- (ii) $\int_a^b \frac{x e^{x^4}}{1+x^2} dx$ -এর মান হবে — (a) 0, (b) 1, (c) a , (d) $2a$ ।
- (iii) $f(x) = |x| + |x-1|$ হলে, $f(x)$ — (a) $x=0$ এবং $x=1$ বিন্দুতে সন্তত, (b) $x=0$ বিন্দুতে সন্তত কিন্তু $x=1$ বিন্দুতে অসন্তত, (c) $x=1$ বিন্দুতে সন্তত কিন্তু $x=0$ বিন্দুতে অসন্তত, (d) এদের কোনোটিই নয়।
- (iv) যদি একটি সরলরেখার দিক অনুপাতগুলি যথাক্রমে 0, 1, -1-এর সঙ্গে সমানুপাতিক হয়, তবে z অক্ষের সঙ্গে তার নতি হবে — (a) $\frac{\pi}{2}$, (b) π , (c) $\frac{3\pi}{2}$, (d) $\frac{3\pi}{4}$ ।
- (v) যদি X সমসত্ত্ব চলকের সম্ভাবনা বিভাজন $f(X)$ হয় এবং X কেবলমাত্র দুটি মান x_1 ও x_2 গ্রহণ করতে পারে, তবে $f(x_1) + f(x_2)$ -এর মান হবে — (a) > 1 , (b) < 1 , (c) $= \frac{1}{2}$, (d) $= 1$ ।
- (vi) মনে করো, সব বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$ এবং $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ও $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ চিত্রণ দুটি যথাক্রমে $f(x) = 5 - x^2$ এবং $g(x) = 3x - 4$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত তবে $(fog)(-1)$ -এর মান হবে — (a) 8, (b) -44, (c) 54, (d) 16।
- (vii) $\frac{d^3y}{dx^3} + y = \sqrt[3]{1 + \frac{dy}{dx}}$ অবকল সমীকরণের মাত্রা হল — (a) 1, (b) 2, (c) 4, (d) 3।
- (viii) $\sin(\cos^{-1} x) - \cos(\sin^{-1} x)$ -এর মান হবে — (a) 1, (b) x , (c) $\frac{1}{x}$, (d) 0।
- (ix) যদি $\vec{\alpha} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\vec{\beta} = p\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টর দুটি সমান্তরাল হয়, তবে p -এর মান হবে — (a) $-\frac{1}{3}$, (b) $\frac{2}{3}$, (c) $-\frac{2}{3}$, (d) $-\frac{3}{2}$ ।
- (x) একটি বোঁকশূন্য ছক্কে তিনবার ছোঁড়া হল। প্রথমবার ছোঁড়ায় 5 পাওয়া গেল। তিনবার ছুঁড়ে মোট 16 পাওয়ার শর্তাধীন সম্ভাবনাটি হবে — (a) $\frac{1}{9}$, (b) $\frac{1}{18}$, (c) $\frac{1}{108}$, (d) $\frac{5}{16}$ ।