

1. (a) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

2

(i) স্বাভাবিক সংখ্যার সেট N -এর উপর একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া $*$ সংজ্ঞায়িত হয় $a * b = \frac{a+2b}{3}$ সকল $a, b \in N$ -এর জন্য। দ্বিপদ প্রক্রিয়াটি সংযোগ কিনা আলোচনা করো।

(ii) $\sec^2\left(\cot^{-1}\frac{1}{2}\right) + \operatorname{cosec}^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)$ -এর মান নির্ণয় করো।

(b) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

2

(i) $2A + B^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$ এবং $2B + A^T = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ হয় তবে ম্যাট্রিক্স A -এর মান নির্ণয় করো।

(ii) প্রমাণ করো যে, $\begin{vmatrix} 1 & \log_a b & \log_a c \\ \log_b a & 1 & \log_b c \\ \log_c a & \log_c b & 1 \end{vmatrix} = 0$, ($a > 0, b > 0, c > 0$)।

(c) যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

2×3=6

(i) $y = Ae^x + Be^{-x} + x^2$ সমীকরণের A এবং B অপনয়ন করে অবকল সমীকরণটি নির্ণয় করো (A, B ধ্রুবক)।

(ii) $x^2 = a^{\sin^{-1}t}$ এবং $y^2 = a^{\cos^{-1}t}$ হলে দেখাও যে, $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ ।

(iii) $f(x) = \frac{\sin 5x}{2x}$ (যখন $x \neq 0$)
 $= \frac{5k}{4}$ (যখন $x = 0$)

$f(x); x = 0$ -তে সন্তত হলে, k -এর মান নির্ণয় করো।

(iv) $x > 0, y > 0$ এবং $xy = 100$ হলে, $(x + y)$ -এর অবম মান নির্ণয় করো। (কলনবিদ্যার প্রয়োগ করতে হবে)

(v) মান নির্ণয় করো : $\int \frac{\cos x + x \sin x}{x(x + \cos x)} dx$ ।

(vi) $f(x) = -f(-x)$ হলে দেখাও যে, $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ ।

(d) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

2

(i) $-3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টরের অভিমুখে একটি ভেক্টর নির্ণয় করো যার মান 14 একক।

(ii) yz সমতলে অবস্থিত কোনো সরলরেখা z -অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে 60° কোণ করলে সরলরেখার দিক কোসাইনগুলি নির্ণয় করো।

(e) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

2

(i) $P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{3}$ এবং $P(A - B) = \frac{1}{6}$ হলে, A এবং B ঘটনা দুটি স্বাধীন কিনা যাচাই করো।

(ii) একটি দ্বিপদ বিভাজন $B(n, p)$ -এর গড় মান ও ভেদমান যথাক্রমে 4 এবং 3.2 হলে, n এবং p -এর মান নির্ণয় করো।

2. (a) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

4

(i) $\mathbb{Z}$ অখণ্ড সংখ্যাসমূহের সেট। $\mathbb{Z}$ -এর উপর $*$ একটি প্রক্রিয়া নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত হয় : $a * b = a + b - 2$ যেখানে $a, b \in \mathbb{Z}$ ।
 (x) দেখাও যে $*$ একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া। (y) $*$ -এর একরূপ (Identity) উপাদান নির্ণয় করো। (z) একটি পদ $a \in \mathbb{Z}$ -এর বিপরীত (Inverse) পদ নির্ণয় করো।

(ii) দেখাও যে, $\sin^{-1}\frac{12}{13} + \cos^{-1}\frac{14}{5} + \tan^{-1}\frac{163}{16} = \pi$ ।

(b) নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও :

4×2=8

(i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 7 \\ -6 & 0 & 8 \\ 7 & -8 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ হলে, AC, BC এবং $(A + B)C$ -এর মান নির্ণয় করো। প্রমাণ করো যে, $(A + B)C = AC + BC$ ।

অথবা, $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ হলে দেখাও যে, যে-কোনো ধনাত্মক সংখ্যা n -এর জন্য $A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$ ।

(ii) $x \neq y \neq z$ এবং $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$ হলে দেখাও যে, $1 + xyz = 0$ ।

অথবা, প্রমাণ করো যে, $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = (1-x^3)^2$ ।

(c) নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও :

4x3=12

(i) $(\cos x)^y = (\cos y)^x$ হলে দেখাও যে, $\frac{dy}{dx} = \frac{y \tan x + \log \cos y}{x \tan y + \log \cos x}$ ।

অথবা, $y = (\tan^{-1}x)^2$ হলে দেখাও যে, $(1+x^2)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x(1+x^2) \frac{dy}{dx} = 2$ ।

(ii) মান নির্ণয় করো : $\int \frac{2dx}{(1-x)(1+x^2)}$ । অথবা, মান নির্ণয় করো : $\int (\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}) dx$ ।

(iii) সমাধান করো : $xy \frac{dy}{dx} = (x+2)(y+2)$, দেওয়া আছে $x = 1$ যখন $y = -1$ ।

অথবা, সমাধান করো : $x^2 dy + (xy + y^2) dx = 0$ যখন $x = 1$ এবং $y = 1$ ।

(d) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

4

(i) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ এমন তিনটি ভেক্টর যেন $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ এবং $|\vec{c}| = 7$, $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ -এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করো।

(ii) $A = (2, -1, 1)$, $B = (1, -3, -5)$ এবং $C = (3, -4, -4)$ তিনটি বিন্দু। প্রমাণ করো যে, ΔABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ তৈরি করে (ভেক্টর পদ্ধতি প্রয়োগ করতে হবে)। অন্য কোণ দুটিও নির্ণয় করো।

(e) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

4

(i) x -অক্ষ এবং $|x| + |y| = 1$ (যেখানে $y \geq 0$) দ্বারা সীমাবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো। (কলনবিদ্যার প্রয়োগ করতে হবে)

(ii) প্রমাণ করো যে, $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} \log 2$ ।

(f) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

4

(i) A এবং B এমন দুটি ঘটনা যেন $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ এবং $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ হলে, $P(A/B)$, $P(B/A)$, $P(A \cup B)$ এবং $P(\bar{B}/\bar{A})$ -এর মান নির্ণয় করো।

(ii) $A_1, A_2, \dots, A_n$ ঘটনাসমূহ স্বাধীন এবং $P(A_i) = 1 - q_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) হলে প্রমাণ করো যে,
 $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n$ ।

3. (a) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

5

(i) একটি কৃষক সমবায় সমিতির কাছে 50 হেক্টর জমি আছে X এবং Y শস্যদানা চাষ করার জন্য। X এবং Y শস্যদানা থেকে হেক্টর প্রতি লাভের পরিমাণ যথাক্রমে 10,500 টাকা এবং 9,000 টাকা। ওই শস্যদানা রক্ষা করার জন্য যে তরল কীটনাশক ব্যবহার করা হয় যা X -এর জন্য হেক্টর প্রতি 20 লিটার এবং Y -এর জন্য হেক্টর প্রতি 10 লিটার। ওই জমির জল যে পুকুরে যায় তার মাছ এবং অন্যান্য প্রাণী রক্ষার জন্য 800 লিটারের বেশি কীটনাশক ব্যবহার করা যাবে না। প্রত্যেক প্রকার শস্যদানা কতটা জমিতে চাষ করলে সমবায়ের সর্বাধিক লাভ হয় তা নির্ণয় করার সমস্যাকে রৈখিক প্রোগ্রাম বিধি সমস্যা হিসেবে প্রকাশ করো এবং সমাধান করো।

(ii) লেখচিত্রের সাহায্যে রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাটির সমাধান করো এবং অভীষ্ট অপেক্ষক Z -এর সর্বাধিক মান নির্ণয় করো।
(ছক কাগজের প্রয়োজন নেই) $Z = 4x + y$

শর্ত সাপেক্ষে $x + y \leq 50$, $3x + y \leq 90$ এবং $x \geq 0$, $y \geq 0$ ।

5x2=10

(b) যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

(i) প্রমাণ করো যে, $y^2 = 4a \left[x + a \sin \frac{x}{a} \right]$ -এর উপর অবস্থিত যে-সকল বিন্দুতে স্পর্শক x -অক্ষের সমান্তরাল তা একটি অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত। অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করো।

(ii) সমাধান করো : $\frac{dy}{dx} - 3y \cot x = \sin 2x$, দেওয়া আছে, $y = 2$ যখন $x = \frac{\pi}{2}$ ।

(iii) x, y দুটি ধনাত্মক সংখ্যা যেন $x + y = 60$ এবং xy^3 চরম। x এবং y -এর মান নির্ণয় করো।

(iv) সীমার যোগফল আকারে প্রকাশ করে $\int (x^2 + x) dx$ -এর মান নির্ণয় করো।

(c) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

5

- (i) একটি পরিবর্তনশীল সমতল মূলবিন্দু থেকে $3p$ দূরে অবস্থিত এবং অক্ষ তিনটিকে যথাক্রমে A, B ও C বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে, ΔABC -এর ভরকেন্দ্রের সঞ্চার পথের সমীকরণ $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{p^2}$ ।
- (ii) $(3, 4, 1)$ এবং $(0, 1, 0)$ বিন্দুগামী একটি সমতলের সমীকরণ নির্ণয় করো যা $\frac{x+3}{2} = \frac{y-3}{7} = \frac{z-2}{5}$ -এর সমান্তরাল।

PART - B : (Marks - 10)

1. বিকল্প উত্তরগুলির মধ্যে থেকে সঠিক উত্তরটি বেছে নিয়ে লেখো :

1×10=10

- (i) $\mathbb{R}$ সকল বাস্তব সংখ্যার সেট f এবং g দুটি চিত্রণ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ যেখানে $f(x) = 5 - x^2$ এবং $g(x) = 3x - 4$, তখন $(f \cdot g)(-1)$ -এর মান হবে — (a) 8, (b) -44, (c) 54, (d) 16।
- (ii) $\sin^{-1}\left(\sin \frac{5\pi}{6}\right)$ -এর মুখ্য মান হবে — (a) $\frac{\pi}{6}$, (b) $\frac{5\pi}{6}$, (c) $\frac{7\pi}{6}$, (d) $\frac{\pi}{3}$ ।
- (iii) যদি $\omega, 1$ -এর একটি অবাস্তব ঘনমূল হয় তবে $\begin{vmatrix} 1 & \omega^2 & \omega \\ \omega & 1 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{vmatrix}$ -এর মান হবে — (a) -1, (b) ω^3 , (c) 0, (d) $-\omega^2$ ।
- (iv) $f(x) = |x|$; যেখানে $x \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ = সকল বাস্তব সংখ্যার সেট) হলে, $f(x), x = 0$ বিন্দুতে — (a) অসম্প্রস্তুত এবং অন্তরকলনযোগ্য নয়, (b) সম্প্রস্তুত এবং অন্তরকলনযোগ্য, (c) অসম্প্রস্তুত এবং অন্তরকলনযোগ্য, (d) সম্প্রস্তুত এবং অন্তরকলনযোগ্য নয়।
- (v) $3y = x^2 - 2x + 4$ বক্রের $x = \frac{5}{2}$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x -অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে θ কোণ করে তখন θ -এর মান হবে — (a) 30° , (b) 60° , (c) 45° , (d) 90° ।
- (vi) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{2200}x - \cos^{2200}x) dx$ -এর মান হবে — (a) 0, (b) 1, (c) $\frac{1}{2200}$, (d) $\frac{1}{1100}$ ।
- (vii) $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ এমন দুটি ভেক্টর যেখানে $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, তখন $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ -এর মধ্যবর্তী কোণ হবে — (a) 30° , (b) 60° , (c) 90° , (d) 120° ।
- (viii) একটি সরলরেখা x -অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে 45° এবং z -অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে 60° কোণ করে। সেই সরলরেখা y -অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে θ কোণ করলে θ -এর মান হবে — (a) 45° , (b) 60° , (c) 120° , (d) 135° ।
- (ix) A এবং B পরস্পর স্বাধীন ঘটনা। $P(A) = 0.2$ এবং $P(A \cup B) = 0.6$ হলে, $P(B)$ হবে — (a) 0.5, (b) 0.4, (c) 0.8, (d) 0.3।
- (x) একটি যদৃচ্ছ চল X-এর সম্ভাবনা বিভাজন হল
- | | | | | |
|------|-------|-------|-------|-------|
| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
| P(X) | p_1 | p_2 | p_3 | p_4 |
- যদি $p_1 + p_2 + p_3 = 0.8$ এবং $p_2 + p_3 + p_4 = 0.9$ হয়, তবে — (a) $p_1 = 0.2$, (b) $p_1 + p_4 = 0.3$, (c) $p_4 = 0.1$, (d) $p_2 + p_3 = 0.5$ ।