



PART – A : (Marks – 70)

1. (a) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

2

(i) মনে করো, সকল বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$ এবং সকল $x \in \mathbb{R}$ -এর জন্য $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ চিত্রণ $f(x) = ax + 2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।
যদি $f \circ f = I_{\mathbb{R}}$ হয় তবে a -এর মান নির্ণয় করো।

(ii) মান নির্ণয় করো : $4\left(2 \tan^{-1} \frac{1}{3} + \tan^{-1} \frac{1}{7}\right)$ ।

(b) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

2

(i) মান নির্ণয় করো : $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \beta + \gamma & \gamma + \alpha & \alpha + \beta \end{vmatrix}$ ।

(ii) যদি $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ এবং $A^2 - 4A + 3I = O$ হয়, যেখানে I হল 2 মাত্রার একক ম্যাট্রিক্স; তবে A^{-1} নির্ণয় করো।

(c) যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

2×3=6

(i) $f(x) = \begin{cases} \frac{|\sin x|}{x}, & \text{যখন } x \neq 0 \\ 1, & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$ অপেক্ষকটির $x = 0$ বিন্দুতে সন্ততা পরীক্ষা করো।

(ii) $\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ -এর সাপেক্ষে $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ -এর অন্তরকলজ নির্ণয় করো।

(iii) মান নির্ণয় করো : $\int \left\{ \frac{1}{(\log_e x)} - \frac{1}{(\log_e x)^2} \right\} dx$ ।

(iv) $f(x) = 4(6-x)^{\frac{2}{3}}$ অপেক্ষকের ক্ষেত্রে $5 \leq x \leq 7$ বিস্তারে লাগরাঞ্জের মধ্যম মান উপপাদ্য প্রযোজ্য কিনা লেখো।

(v) যে-সকল বৃত্ত মূলবিন্দুতে x অক্ষকে স্পর্শ করে তাদের অবকল সমীকরণ নির্ণয় করো।

(vi) মান নির্ণয় করো : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_e(1 + \alpha x)}{e^{2x} - 1}$ ।

(d) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

2

(i) যদি $\vec{b} = 2\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}$ ভেক্টরের ওপর $\vec{a} = \lambda\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ (Projection) 4 একক হয়, তবে λ -এর মান নির্ণয় করো।

(ii) $x - y + 2z = 9$ এবং $2x + y + z = 7$ সমতল দুটির মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করো।

(e) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

2

(i) যদি $P(A/B) = 0.75$, $P(B/A) = 0.6$ এবং $P(A) = 0.4$ হলে, $P(\bar{A}/\bar{B})$ -এর মান নির্ণয় করো।

(ii) দুটি ঝাঁকশূন্য মুদ্রা উৎক্ষেপণে যদি হেডের সংখ্যা X দ্বারা সূচিত করা হয় তবে X -এর গড় মান নির্ণয় করো।

2. (a) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

4

(i) স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহের সেট $\mathbb{N}$ -এর ওপর একটি সম্বন্ধ R নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত :

$(x, y) \in R \Rightarrow (x - y)$ রাশিটি 5 দ্বারা বিভাজ্য, সকল $x, y \in \mathbb{N}$ -এর জন্য। প্রমাণ করো যে, $\mathbb{N}$ -এর ওপর R একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

(ii) যদি $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y + \sin^{-1} z = \pi$ হয়, তাহলে প্রমাণ করো যে, $x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2} + z\sqrt{1-z^2} = 2xyz$ ।

(b) নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও :

4×2=8

(i) $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্স-কে একটি প্রতিসম (Symmetric) ও একটি বিপ্রতিসম (Skew-symmetric) ম্যাট্রিক্স-এর সমষ্টিরূপে প্রকাশ করো।

অথবা, বিপরীত ম্যাট্রিক্স পদ্ধতির প্রয়োগে সমাধান করো : $\begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ x + 3z = 11 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ ।

(ii) যদি p, q, r গুণোত্তর প্রগতিভুক্ত না হয় এবং
$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{q}{p} & \alpha + \frac{q}{p} \\ 1 & \frac{r}{p} & \alpha + \frac{r}{p} \\ p\alpha + q & q\alpha + r & 0 \end{vmatrix} = 0$$
 হয়, তবে প্রমাণ করো যে, $p\alpha^2 + 2q\alpha + r = 0$ ।

অথবা, দেখাও যে,
$$\begin{vmatrix} a^2 + 1 & ab & ac \\ ab & b^2 + 1 & bc \\ ca & bc & c^2 + 1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2$$

(c) নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও :

4×3=12

(i) $\sin y = x \sin(a + y)$ হলে দেখাও যে, $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin a}{1 - 2x \cos a + x^2}$ ।

অথবা, $pv^a = c$ (a এবং c ধ্রুবক) হলে দেখাও যে, $v^2 \frac{d^2p}{dv^2} = a(a + 1)p$ ।

(ii) মান নির্ণয় করো : $\int e^x \frac{x-4}{(x-2)^3} dx$ । অথবা, মান নির্ণয় করো : $\int \sqrt{1 + \operatorname{cosec} x} dx$ ।

(iii) সমাধান করো : $(1 + 3e^{\frac{y}{x}})dy + 3e^{\frac{y}{x}}\left(1 - \frac{y}{x}\right)dx = 0$ ।

অথবা, একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল যদি সমহারে বর্ধিত হয়, তাহলে দেখাও যে, বৃত্তটির পরিধির বৃদ্ধির হার ব্যাসার্ধের সঙ্গে ব্যস্তানুপাতে পরিবর্তিত হবে।

(d) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

4

(i) $\vec{a}, \vec{b}$ এবং $\vec{c}$ তিনটি ভেক্টর এমন যে, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$; যদি $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$ এবং $|\vec{c}| = 5$ হয়, তবে দেখাও যে, $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = -25$ ।

(ii) $\vec{\alpha} = \lambda \hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}, \vec{\beta} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}, \vec{\gamma} = 3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $[\vec{\alpha} \vec{\beta} \vec{\gamma}] = -10$ হলে, λ -এর মান নির্ণয় করো।

(e) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

4

(i) মান নির্ণয় করো (নির্দিষ্ট সমাকলের সাহায্যে) : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right\}^{\frac{1}{n}}$ ।

(ii) মান নির্ণয় করো : $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\theta}{1 + \sin \theta} d\theta$ ।

(f) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

4

(i) যদি a এবং b দুটি ধ্রুবক রাশি হয় তবে প্রমাণ করো যে, $\operatorname{Var}(aX + b) = a^2 \operatorname{Var}(X)$ ।

(ii) দুটি পাত্রের মধ্যে প্রথমটিতে 2টি লাল ও 3টি সাদা এবং দ্বিতীয়টিতে 3টি লাল ও 5টি সাদা বল আছে। প্রথম পাত্র থেকে যথেষ্টভাবে একটি বল তুলে দ্বিতীয় পাত্রে রাখা হয় এবং তারপর দ্বিতীয় পাত্র থেকে একটি বল তোলা হয়। যদি তোলা বলটি লাল হয়, তবে প্রথম পাত্র থেকে দ্বিতীয় পাত্রে স্থানান্তরিত করা বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা কত?

3. (a) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

5

(i) একটি পরিবহন সংস্থার পাঁচটি জায়গা A, B, C, D ও E-তে অফিস আছে। A ও B-তে অবস্থিত অফিসে যথাক্রমে 8 ও 10টি লরি আছে। C, D ও E-তে অবস্থিত অফিসগুলিতে যথাক্রমে 6, 8 ও 4টি লরির প্রয়োজন। একটি অফিস থেকে অন্য অফিসের দূরত্ব (কিমি) নীচের তালিকায় দেওয়া হল :

পর্যন্ত		C	D	E
থেকে	A	2	5	3
	B	4	2	7

কীভাবে A ও B অফিসের লরিগুলি C, D ও E-তে পাঠালে লরিগুলি ন্যূনতম দূরত্ব অতিক্রম করবে? এই সমস্যাটিকে রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যা হিসেবে প্রকাশ করো।

(ii) লেখচিত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত অভীষ্ট অপেক্ষক Z-এর অবম মান নির্ণয় করো :

$Z = 3x + 2y$; শর্তসাপেক্ষে, $2x + y \geq 14, 2x + 3y \geq 22, x + y \geq 5$ এবং $x \geq 0, y \geq 0$ ।

(b) যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

5×2=10

- যদি $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ বক্রের কোনো বিন্দুতে অভিলম্ব x অক্ষের সঙ্গে ϕ কোণ উৎপন্ন করে তবে প্রমাণ করো যে, অভিলম্বটির সমীকরণ হবে $y \cos \phi - x \sin \phi = a \cos 2\phi$.
- $3x^2 = 4y$ অধিবৃত্ত থেকে $3x - 2y + 12 = 0$ সরলরেখা দ্বারা ছেদিত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।
- r সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট গোলকে বৃহত্তম যে চোঙ অন্তর্লিখিত করা যায় তার আয়তন নির্ণয় করো।
- সমাধান করো : $x^2 dy + y(x + y) dx = 0$ ।

(c) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

5

- $(2, -1, 3)$ বিন্দুগামী যে সরলরেখা $\vec{r} = (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) + \lambda(2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$ ও $\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}) + \mu(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$ সরলরেখা দুটির প্রত্যেকটির ওপর লম্ব, তার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করো।
- $(-1, 1, 1)$ ও $(1, -1, 1)$ বিন্দুগামী ও $x + 2y + 2z = 5$ সমতলের ওপর লম্ব সমতলের সমীকরণ নির্ণয় করো।

PART - B : (Marks - 10)

1. বিকল্প উত্তরগুলির মধ্যে থেকে সঠিক উত্তরটি বেছে নিয়ে লেখো :

1×10=10

- $\mathbb{R}$ একটি বাস্তব সংখ্যার সেট; A সেটের ওপর R সম্পর্কটি এবুপে সংজ্ঞাত যে, $R = \{(a, b) : a - b < 3, a, b \in \mathbb{R}\}$, তাহলে R সম্পর্কটি — (a) সংক্রমণ, (b) সমতুল্যতা, (c) স্বসম, (d) প্রতিসম।
- যদি $\sec^{-1} x = \operatorname{cosec}^{-1} y$ হয়, তাহলে $\cos^{-1} \frac{1}{x} + \cos^{-1} \frac{1}{y}$ -এর মান হবে— (a) π , (b) $\frac{2\pi}{3}$, (c) $\frac{5\pi}{6}$, (d) $\frac{\pi}{2}$ ।
- A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং $A^2 = A$ হলে, $(I + A)^3 - 7A$ হবে — (a) A , (b) I , (c) $I - A$, (d) $3A$ ।
- $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ হলে, f -এর প্রসার হয়— (a) $[1, \infty)$, (b) $[0, 1)$, (c) $[-1, 1]$, (d) $(0, 1]$ ।
- $f(x) = \log_x(\log x)$ হলে, $f'(e)$ -এর মান হবে— (a) e , (b) $\frac{2}{e}$, (c) $\frac{1}{e}$, (d) 0 ।
- যদি $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{3}$ এবং $|\vec{a} \times \vec{b}| = 12$ হয়, তবে $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ -এর অন্তর্ভুক্ত কোণ হবে — (a) $\frac{\pi}{3}$, (b) $\frac{\pi}{6}$, (c) $\frac{\pi}{4}$, (d) $\frac{\pi}{2}$ ।
- $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+5}{4}$ সরলরেখাটি $2x + 4y - z = 3$ সমতলকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার স্থানাঙ্ক হল—
(a) $(3, 1, -1)$, (b) $(3, -1, 1)$, (c) $(3, -1, -1)$, (d) এদের কোনোটিই নয়।
- $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$ অবকল সমীকরণের সমাধান হল — (a) $e^x + e^y = c$, (b) $e^x - e^y = c$, (c) $e^x + e^{-y} = c$, (d) এদের কোনোটিই নয়।
- যদি $P(A) = \frac{3}{7}$, $P(B) = \frac{4}{7}$ এবং $P(A \cap B) = \frac{2}{9}$ হয়, তাহলে $P(A/B)$ -এর মান হবে —
(a) $\frac{7}{18}$, (b) $\frac{14}{27}$, (c) $\frac{5}{18}$, (d) $\frac{4}{9}$ ।
- কোনো দ্বিপদ নিবেশনে সাফল্যের সম্ভাবনা $\frac{1}{4}$ এবং সমক পার্থক্য 3 হলে গড় মান হবে— (a) 6, (b) 8, (c) 12, (d) 15।